

**CALCULO**  
**E.U.I.T. INFORMATICA DE OVIEDO. 05-06**  
**CALCULO DE PRIMITIVAS**

Concepto de primitiva:

Se dice que la función  $F(x)$  es una función primitiva de la función  $f(x) \Leftrightarrow$   

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \text{Dom } f$$

La función  $f(x)$  recibe el nombre de integrando y sumando a  $F(x)$  una constante arbitraria  $C$ , se obtiene otra función primitiva. Recíprocamente, dos primitivas cualesquiera de  $f(x)$  solo se diferencian en una constante (suponiendo que el dominio sea un intervalo).

Al conjunto de primitivas de la función  $f$  se le llama la *integral indefinida* de  $f$ . Se escribe:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

con  $C$  constante arbitraria, siendo  $F$  una primitiva cualquiera de  $f$ .

Las siguientes propiedades son inmediatas:

$$\int (f + g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx$$

siendo  $f$  y  $g$  dos funciones que admiten primitiva y  $a \in \mathbb{R}$ , es decir, la integral indefinida es un operador lineal.

Primitivas inmediatas.

$$\int adx = ax + C \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1 \quad ; \quad \int (f(x))^n \cdot f'(x)dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C \quad ; \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad a > 0, a \neq 1 \quad ; \quad \int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + C \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad ; \quad \int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \text{sen}(x)dx = -\cos(x) + C \quad ; \quad \int \text{sen}(f(x))f'(x)dx = -\cos(f(x)) + C$$

$$\int \cos(x)dx = \text{sen}(x) + C \quad ; \quad \int \cos(f(x))f'(x)dx = \text{sen}(f(x)) + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int \sec^2(x)dx = \int (1 + \text{tg}^2(x))dx = \text{tg}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(f(x))} f'(x)dx = \text{tg}(f(x)) + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\cot g(x) + C \quad ; \quad \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(f(x))} f'(x) dx = -\cot g(f(x)) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + C \quad ; \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} f'(x) dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + C \quad ; \quad \int \frac{1}{1+(f(x))^2} f'(x) dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = -\log(\cos(x)) + C$$

$$\int \cot g(x) dx = \log(\operatorname{sen}(x)) + C$$

Ejemplos:

$$\int \frac{4x^3}{1+x^8} dx = \int \frac{4x^3}{1+(x^4)^2} dx = \operatorname{arctg}(x^4) + C \quad ; \quad \int \frac{8x+5}{4x^2+5x+1} dx = \log(4x^2+5x+1) + C$$

$$\int \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos(3x) dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) + C \quad ; \quad \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C$$

$$\int \frac{\log(x)}{x} dx = \int \frac{1}{x} \log(x) dx = \frac{\log^2(x)}{2} + C \quad ; \quad \int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2} dx = \frac{(\operatorname{arctg}(x))^2}{2} + C$$

Métodos generales de integración: descomposición, cambio de variable y partes.

Descomposición:

$$\int (x^5 + 6x^3 - 4x^2 + 5) dx = \int x^5 dx + 6 \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + 5 \int dx = \frac{x^6}{6} + \frac{3x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + 5x + C$$

Integración por sustitución o cambio de variable.

Sea  $f$  una función que admite primitiva; si hacemos el cambio de variable  $x = g(t)$  siendo  $g$  una función derivable con derivada continua que admite función inversa resulta:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

Ejemplos:

$$* \quad \int x(2x+1)^{10} dx = \int \frac{t-1}{2} t^{10} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4} \int (t^{11} - t^{10}) dt = \frac{1}{4} \left( \frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{(2x+1)^{12}}{12} - \frac{(2x+1)^{11}}{11} \right) + C$$

Se ha hecho el cambio  $2x+1 = t$ , es decir,  $x = \frac{t-1}{2}$   $dx = \frac{1}{2} dt$

$$* \quad \int x \sqrt{x^2+1} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + C$$

Se ha hecho el cambio  $x^2+1 = t^2$   $t > 0$ , es decir,  $2x dx = 2t dt$   $x dx = t dt$

$$* \int \frac{1}{x \cdot \log(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log|t| + C = \log|\log(x)| + C$$

Se ha hecho el cambio  $\log(x) = t$ , es decir,  $x = e^t$   $\frac{1}{x} dx = dt$

Integración por partes:

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones derivables en el punto  $x$ , sabemos que  $fg$  es derivable en  $x$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \text{ es decir, } f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int f(x)g'(x)dx &= \int (fg)'(x) - \int f'(x)g(x)dx = (fg)(x) - \int f'(x)g(x)dx = \\ &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \end{aligned}$$

Si llamamos  $u = f(x)$ ,  $v = g(x)$  entonces  $du = f'(x)dx$  y  $dv = g'(x)dx$  la fórmula se puede escribir así:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ejemplos:

$$* \int e^{2x} \operatorname{sen}(x) dx = I \quad ; \quad u = e^{2x} \quad du = 2e^{2x} dx \quad dv = \operatorname{sen}(x) dx \quad v = -\cos(x)$$

$$I = -e^{2x} \cos(x) + 2 \int e^{2x} \cos(x) dx \quad ; \quad u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} dx \quad ; \quad dv = \cos(x) dx, \quad v = \operatorname{sen}(x)$$

$$I = -e^{2x} \cos(x) + 2 \left[ e^{2x} \operatorname{sen}(x) - 2 \int e^{2x} \operatorname{sen}(x) dx \right] = -e^{2x} \cos(x) + 2e^{2x} \operatorname{sen}(x) - 4I$$

$$I = \frac{1}{5} e^{2x} (2 \operatorname{sen}(x) - \cos(x)) + C$$

$$* \int \log(x) dx = I \quad ; \quad u = \log(x), \quad du = \frac{1}{x} dx \quad ; \quad dv = dx \quad , \quad v = x$$

$$I = x \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log(x) - x = x(\log(x) - 1) + C$$

Integración de funciones racionales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{siendo } P \text{ y } Q \text{ polinomios}$$

Es suficiente estudiar el caso en que el grado de  $P(x)$  sea menor que el grado de  $Q(x)$ , puesto que en caso contrario se realiza la división y existen polinomios  $C(x)$  y  $R(x)$ , cociente y resto respectivamente, tales que  $P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$  con grado de  $R(x) <$  grado de  $Q(x)$  y por tanto

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Así pues, supongamos que el grado de  $P(x)$  es inferior al grado de  $Q(x)$ . Para hallar la integral se calculan las raíces de la ecuación  $Q(x) = 0$  y se descompone la fracción original en suma de fracciones simples. Distinguiremos los tres casos siguientes:

\* raíces reales simples :  $a, b, c, \dots$  ; en este caso 
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots$$

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} \quad ; \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \quad , \quad Ax - A + Bx + B = 1$$

$$\begin{array}{lll} \text{Si } x=1 & 2B=1 & B=1/2 \\ \text{Si } x=-1 & -2A=1 & A=-1/2 \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x-1| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

\* Supongamos que  $Q(x) = 0$  tiene una raíz real  $a$  de orden de multiplicidad  $m$  ; en este caso

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + \dots$$

Ejemplo:

$$I = \int \frac{6x^4 - 9x^2 + 5}{(x-1)^2(x+2)(x+1)^2} dx$$

$$\frac{6x^4 - 9x^2 + 5}{(x-1)^2(x+2)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{(x+1)^2}$$

$$A_1(x-1)(x+2)(x+1)^2 + A_2(x+2)(x+1)^2 + B(x-1)^2(x+1)^2 + C_1(x-1)^2(x+2)(x+1) + C_2(x-1)^2(x+2) = 6x^4 - 9x^2 + 5$$

$$\text{Si } x=1 \quad 12A_2 = 2 \quad A_2 = 1/6$$

$$\text{Si } x=-1 \quad 4C_2 = 2 \quad C_2 = 1/2$$

$$\text{Si } x=-2 \quad 9B = 65 \quad B = 65/9$$

$$\text{Si } x=0 \quad -2A_1 + 2A_2 + B + 2C_1 + 2C_2 = 5 \quad \text{y resulta} \quad C_1 - A_1 = -16/9$$

$$\text{Si } x=2 \quad 36A_1 + 36A_2 + 9B + 12C_1 + 4C_2 = 65 \quad \text{y resulta} \quad 3C_1 + 9A_1 = -2$$

Resolvemos el sistema de las dos ecuaciones anteriores y se obtiene  $A_1 = 5/18$  ,  $C_1 = -3/2$

$$I = \frac{5}{18} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{65}{9} \int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{5}{18} \log|x-1| - \frac{1}{6} \frac{1}{x-1} + \frac{65}{9} \log|x+2| - \frac{3}{2} \log|x+1| - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + C$$

\* raíces complejas :  $a + bi$  ,  $a - bi$  , ...

Por cada par de raíces complejas conjugadas (simples) se pone una fracción de la forma  $\frac{Ax + B}{(x - a)^2 + b^2}$

Ejemplo:

$$I = \int \frac{8x^2 - 6x + 6}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} dx = \int \frac{8x^2 - 6x + 6}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx = \int \frac{8x^2 - 6x + 6}{(x-1)[(x-1)^2 + 4]}$$

$$\frac{8x^2 - 6x + 6}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{(x-1)^2 + 4}$$

$$A[(x-1)^2 + 4] + (Bx + C)(x-1) = 8x^2 - 6x + 6$$

Si $x = 1$	4A = 8	A = 2
Si $x = 0$	5A - C = 6	C = 4
Si $x = -1$	8A + (-B + C)(-2) = 20	B = 6

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{6x+4}{(x-1)^2+4} dx = 2 \log|x-1| + 3 \int \frac{2x+\frac{4}{3}}{(x-1)^2+4} dx = \\ &= 2 \log|x-1| + 3 \int \frac{2x-2+\frac{4}{3}+2}{(x-1)^2+4} dx = 2 \log|x-1| + 3 \int \frac{2x-2}{(x-1)^2+4} dx + 3 \int \frac{10/3}{(x-1)^2+4} dx = \\ &= 2 \log|x-1| + 3 \log[(x-1)^2+4] + \frac{10}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} = \\ &= 2 \log|x-1| + 3 \log[(x-1)^2+4] + 5 \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Integración de algunas funciones irracionales

\*  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$  siendo  $R$  una función racional  
 cambio de variable  $x = a \operatorname{sen}(t)$

Ejemplo:

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx \quad x = \sqrt{2} \operatorname{sen}(t) \quad ; \quad dx = \sqrt{2} \cos(t) dt$$

$$I = \int \frac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}^3(t)}{\sqrt{2-2\operatorname{sen}^2(t)}} \sqrt{2} \cos(t) dt = 2\sqrt{2} \int \operatorname{sen}^3(t) dt = 2\sqrt{2} \int \operatorname{sen}(t)(1-\cos^2(t)) dt =$$

$$= 2\sqrt{2} \int \operatorname{sen}(t) dt - 2\sqrt{2} \int \cos^2(t)\operatorname{sen}(t) dt = -2\sqrt{2} \cos(t) + 2\sqrt{2} \frac{\cos^3(t)}{3} =$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \frac{(2-x^2)^{3/2}}{6\sqrt{2}} - \frac{(2-x^2)^{1/2}}{\sqrt{2}} \right) + C$$

ya que  $\cos(t) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)} = \sqrt{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}$

\*  $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$  siendo  $R$  una función racional

cambio de variable  $x = a \operatorname{tg}(t)$

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+1}} \quad x = \operatorname{tg}(t) \quad dx = \sec^2(t)$$